Ejercicio 1A Julio (mod 4) 2023 (Análisis)

Sea la función f : [-2,2π] → R, definida por $f(x)=\begin{cases} 5x+1 & \text{si} \quad -2\le x\le 0 \\ e^x\cos(x) & \text{si} \quad 0<x\le 2\pi \end{cases}$

(a) (2 puntos) Halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

(b) (0,5 puntos) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=\frac{\pi}{2}$.

Solución

Sea la función f : [-2,2π] → R, definida por $f(x)=\begin{cases} 5x+1 & \text{si} \quad -2\le x\le 0 \\ e^x\cos(x) & \text{si} \quad 0<x\le 2\pi \end{cases}$

(a)
Halla los extremos relativos y absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Sabemos que los extremos absolutos se encontrarán en los extremos del intervalo [-2,2π] y las soluciones de f ‘(x) = 0. Entramos en f(x) con ellos, el mayor valor será el del máximo absoluto y el menor valor el de mínimo absoluto.
Extremos relativos: soluciones de f ‘(x) = 0.

$$f'(x)=\begin{cases} 5\neq 0 & \text{si} \quad -2\le x\le 0 \\ e^x\cos(x)+e^x(-\text{sen}(x))=e^x(\cos(x)-\text{sen}(x))=0 & \text{si} \quad 0<x\le 2\pi \end{cases}$$

De f ‘(x) = 0 resulta $e^x(\cos(x)-\text{sen}(x))=0$; De donde

$e^x = 0$; $\ln e^x = \ln 0$; $x \ln e = \ln 0$; $x\cdot 1 = -\infty$; $x = -\infty$; no tiene solución real

$(\cos(x) - \text{sen}(x)) = 0$; $\cos(x) = \text{sen}(x)$; $1 = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$; $\text{tg}(x) = 1$; $x = \text{arctg}(1) = 45^\circ + 180^\circ k = \frac{\pi}{4} + \pi k$ rad

Como el dominio de este tramo es (0, 2π], doy valores de K:

Para $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

Que serán los extremos relativos. Para determinar si son máximos o mínimos, damos valores intermedios:

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{\pi}{6}}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = e^{\frac{\pi}{6}}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) > 0$, luego f es estrictamente creciente en $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

$f'(\pi) = e^{\pi}\cdot(\cos(\pi) - \text{sen}(\pi)) = e^{\pi}\cdot(-1 - 0) < 0$, luego f es estrictamente decreciente en $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = e^{\frac{3\pi}{4}}\cdot(0 - (-1)) = e^{\frac{3\pi}{4}} > 0$, luego f es estrictamente creciente en $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$

Por tanto, en $x = \frac{\pi}{4}$ **hay un máximo relativo** porque en él la función pasa de creciente a decreciente, y en $x = \frac{5\pi}{4}$ **hay un mínimo relativo** porque en él la función pasa de decreciente a creciente.

Los valores que alcanzan son:

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} \simeq 1{,}55$

$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = e^{\frac{5\pi}{4}}\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{4}} \simeq -35{,}88$

Extremos del intervalo:

$f(0) = 5\cdot 0 + 1 = 1$

$f(2\pi) = e^{2\pi}\cdot\cos(2\pi) = e^{2\pi} \simeq 535{,}49$

Luego el **máximo absoluto** es $e^{2\pi}$ y se alcanza en x = 2π, y el **mínimo absoluto** es $-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{4}}$ y se alcanza en $x = \frac{5\pi}{4}$.

(b)

Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$.

Recta tangente en $x = \frac{\pi}{2}$ es: $y - f(\frac{\pi}{2}) = f'(\frac{\pi}{2})\cdot(x - \frac{\pi}{2})$.

Para $x = \frac{\pi}{2} \to f(x) = e^x\cos(x)$; luego $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}\cdot 0 = 0 \to \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ punto de tangencia

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = e^{\frac{\pi}{2}}\cdot(0 - 1) = -e^{\frac{\pi}{2}} = m$ pendiente de la recta tangente

La recta tangente pedida es $y - 0 = -e^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; $y = -e^{\frac{\pi}{2}}x + \frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$

Ejercicio 2A Julio (mod 4) 2023 (Análisis)

Sea f : (0, +∞) → R la función, definida por $f(x) = x(\ln(x))^2$ (ln denota la función logaritmo neperiano).

(a) (1'25 puntos) Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

(b) (1,25 puntos) Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución

Sea f : (0, +∞) → R la función, definida por $f(x) = x(\ln(x))^2$.

(a)

Calcula, si existen, sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Extremos relativos: soluciones de f '(x) = 0.

$f'(x) = 1\cdot(\ln(x))^2 + x\cdot 2\cdot\ln(x)\cdot\frac{1}{x} = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) = \ln(x)\cdot(\ln(x) + 2) = 0$ De donde

$\ln(x) = 0$; $x = e^0 = 1$;

$(\ln(x) + 2) = 0$; $\ln(x) = -2$; $x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

Que serán los extremos relativos. Para determinar si son máximos o mínimos, hacemos la segunda derivada y sustituimos sus valores:

$f''(x) = 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x} + 2\cdot\frac{1}{x} = \frac{2}{x}\cdot(2\ln(x) + 1)$

$f''(1) = \frac{2}{1}\cdot(\ln(1) + 1) = 2\cdot(0 + 1) = 2 > 0$; En x = 1 hay un mínimo relativo

$f''(e^{-2}) = \frac{2}{e^{-2}}\cdot(\ln(e^{-2}) + 1) = 2e^2\cdot(-2\cdot 1 + 1) = -2e^2 < 0$; En $x = e^{-2}$ hay un máximo relativo

Los valores que alcanzan son:

$f(1) = 1(\ln(1))^2 = 1\cdot 0 = 0$

$f(e^{-2}) = e^{-2}(\ln(e^{-2}))^2 = e^{-2}\cdot(-4\cdot\ln e) = -4e^{-2}$

(b)

Calcula, si existen, sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Sabemos que los extremos absolutos se encontrarán en los extremos de la función (0, +∞) y las soluciones de f '(x) = 0. Entramos en f(x) con ellos, el mayor valor será el del máximo absoluto y el menor valor el de mínimo absoluto.

$\lim_{x\to 0^+} x\cdot(\ln(x))^2 = 0\cdot(-\infty)^2 = 0\cdot\infty$ Indeterminación

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(x))^2}{\frac{1}{x}} = \frac{(-\infty)^2}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$$ Indeterminación. Aplico la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln(x)}{\frac{-1}{x}} = -\frac{\infty}{\infty}$$ Indeterminación. Aplico la regla de L'Hôpital:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0$; luego el mínimo relativo (1,0) es el mínimo absoluto por ser el valor de x con menor ordenada.

$\lim_{x\to\infty} x\cdot(\ln(x))^2 = \infty\cdot(\infty)^2 = \infty > 4e^{-2}$; por lo que no habrá máximo absoluto.

Ejercicio 3A Julio (mod 4) 2023 (Análisis)

Calcula a con $0 < a < 1$, tal que $\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx + 2 = 0$ (In denota la función logaritmo neperiano).

Solución

Calcula a con $0 < a < 1$, tal que $\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx + 2 = 0$

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x) \ \to\ du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{1}{x}dx \ \to\ v = \ln(x) \end{array} \right| = (\ln(x))^2 - \int \frac{\ln(x)}{x}dx;$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx + \int \frac{\ln(x)}{x}dx = (\ln(x))^2 \ ;\ 2\int \frac{\ln(x)}{x}dx = (\ln(x))^2 \ \to\ \int \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{(\ln(x))^2}{2}$$

Por tanto

$$\int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx + 2 = \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_a^1 + 2 = \frac{(\ln(1))^2}{2} - \frac{(\ln(a))^2}{2} + 2 = 0 - \frac{(\ln(a))^2}{2} + 2 = 0\ ;\ -(\ln(a))^2 = -4\ ;\ \ln(a) = \pm\ 2$$

$a = e^2 \simeq 7{,}38 > 1$ Solución no válida

$a = e^{-2} \simeq 0{,}13$; Como $0 < e^{-2} < 1$ la solución válida es $a = e^{-2}$

Ejercicio 4A Julio (mod 4) 2023 (Análisis)

Considera las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = \frac{4}{x^2}$.

(a) (1,25 puntos) Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.
(b) (1,25 puntos) Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g.

Solución

(a) (1,25 puntos) Esboza las gráficas de las dos funciones y calcula los puntos de corte entre ellas.

$f(x) = 5 - x^2$ Parábola cóncava con vértice en $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{-2} = 0$; f (0) = 5 $\to$ V (0,5)

$g(x) = \frac{4}{x^2}$ Hipérbola con asíntota vertical en x = 0, y horizontal en y = 0. Ramas en la parte positiva de las x.

Dando valores a x obtenemos los siguientes puntos de sus gráficas:

$f(-2) = 5 - (-2)^2 = 1$; $f(-1) = 5 - (-1)^2 = 4$; $f(1) = 5 - (1)^2 = 4$; $f(2) = 5 - (2)^2 = 1$

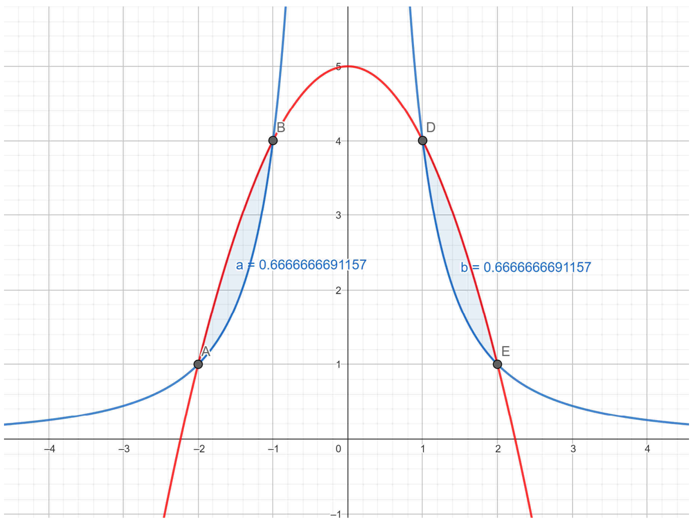
$g(-4) = \frac{4}{(-4)^2} = \frac{1}{4}$; $g(-2) = \frac{4}{(-2)^2} = \frac{4}{4} = 1$; $g(-1) = \frac{4}{(-1)^2} = \frac{4}{1} = 4$; $g(1) = \frac{4}{(1)^2} = 4$; $g(2) = \frac{4}{(2)^2} = 1$; $g(4) = \frac{4}{(4)^2} = \frac{1}{4}$;

Puntos de corte entre las gráficas:

$$5 - x^2 = \frac{4}{x^2} \ ; \ 5x^2 - x^4 = 4 \ ; \ x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \ ; \ t^2 - 5t + 4 = 0 \ ;$$

$$t = \frac{+5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \to x = \pm 2 \to (-2, 1), (2, 1) \\ 1 \to x = \pm 1 \to (-1, 4), (1, 4) \end{cases}$$

Con todo lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



(b) (1,25 puntos) Calcula la suma de las áreas de los recintos limitados por las gráficas de f y g.

Ya que hay simetría en el área encerrada por las dos funciones:

$$A = 2\int_1^2 \left(5 - x^2 - \frac{4}{x^2}\right) dx = 2\left[5x - \frac{x^3}{3} - 4\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2 = 2\left[5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x}\right]_1^2 =$$

$$= 2\left(\left(5 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} + \frac{4}{2}\right) - \left(5 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} + \frac{4}{1}\right)\right) = 2\left(\left(10 - \frac{8}{3} + 2\right) - \left(5 - \frac{1}{3} + 4\right)\right) =$$

$$= 2\left(\left(12 - \frac{8}{3}\right) - \left(9 - \frac{1}{3}\right)\right) = 2\left(\left(\frac{36-8}{3}\right) - \left(\frac{27-1}{3}\right)\right) = 2\left(\left(\frac{28}{3}\right) - \left(\frac{26}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}\ u^2$$

Ejercicio 5B Julio (mod 4) 2023 (Algebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) (1 punto) Halla los valores de m para que la matriz $A - mI$ no tenga inversa.

b) (1,5 puntos) Halla x, distinto de cero, para que $A - xI$ sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A - I)$.

Solución

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

(a)

Halla los valores de m para que la matriz $A - mI$ no tenga inversa.

La matriz A – mI no tiene inversa si det(A - mI) = |A - mI| ≠ 0

$$A - mI = \begin{pmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$$

$$|A - mI| = \begin{vmatrix} 1-m & 1 & 1 \\ 1 & 1-m & 1 \\ 1 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = (1-m)^3 + 1 + 1 - (1-m) - (1-m) - (1-m) = (1-m)^3 - 3(1-m) + 2 = t^3 - 3t + 2, \text{ donde } t = (1-m)$$

Haciendo Ruffini los ceros o raíces son t = 1 y t = - 2.

Si t = 1 → 1 – m = 1; m = 0. Si t = -2 → 1 – m = -2; m = - 3.

Si m = 0 y m = - 3, |A – mI| = 0 y la matriz A - mI no tiene inversa.

(b)

Halla x, distinto de cero, para que A - xI sea la inversa de la matriz $\frac{1}{x}(A - I)$.

$$A - xI = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} \qquad A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (A - I)^t \qquad |A - I| = 0 + 1 + 1 = 2$$

$$\text{Adj}(A - I)^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (A - I)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{x}(A - I)\right)^{-1} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-1} \cdot (A - I)^{-1} = x \cdot (A - I)^{-1} = x \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} & \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} & \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} & \frac{x}{2} & -\frac{x}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1 - x = -\frac{x}{2} \rightarrow 2 - 2x = -x;\ x = 2 \\ 1 = \frac{x}{2};\ x = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 6B Julio (mod 4) 2023 (Algebra)

El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos. El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos. Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el 30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros. Calcula el importe, incluyendo impuestos, invertido en cada una de las bebidas.

Solución

Sea:
x = importe invertido en refrescos sin impuestos,
y = importe invertido en cerveza sin impuestos,
z = importe invertido en vino sin impuestos.

De, “refrescos, cerveza y vino por un importe de 500 euros sin incluir impuestos” → x + y + z = 500.
De, “El gasto en vino es 60 euros menos que los gastos en refrescos y cerveza conjuntamente, sin incluir impuestos” → z = x + y - 60
De, “Teniendo en cuenta que los impuestos de los refrescos, la cerveza y el vino son el 6%, el 12% y el

30%, respectivamente, entonces el importe total de la factura incluyendo impuestos ha ascendido a 592,4 euros” $\rightarrow$ x + 0,06 x + y + 0,12 y + z + 0,3 z = 592,4.

Resolvemos por Cramer.

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ x + y - z = 60 \\ 1{,}06\,x + 1{,}12\,y + 1{,}3\,z = 592{,}4 \end{cases} \rightarrow A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 1 & 1 & -1 & 60 \\ 1{,}06 & 1{,}12 & 1{,}3 & 592{,}4 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1{,}06 & 1{,}12 & 1{,}3 \end{vmatrix} = 1{,}3 - 1{,}06 + 1{,}12 - 1{,}06 + 1{,}12 - 1{,}3 = 0{,}12 \neq 0 \text{ Sistema Compatible Determinado}$$

$$|\Delta_1| = \begin{vmatrix} 500 & 1 & 1 \\ 60 & 1 & -1 \\ 592{,}4 & 1{,}12 & 1{,}3 \end{vmatrix} = 650 - 592{,}4 + 67{,}2 - 592{,}4 + 560 - 78 = 14{,}4 \rightarrow x = \frac{14{,}4}{0{,}12} = 120 \text{ € sin impuestos}$$

$$|\Delta_2| = \begin{vmatrix} 1 & 500 & 1 \\ 1 & 60 & -1 \\ 1{,}06 & 592{,}4 & 1{,}3 \end{vmatrix} = 78 - 530 + 592{,}4 - 63{,}6 + 592{,}4 - 650 = 19{,}2 \rightarrow x = \frac{19{,}2}{0{,}12} = 160 \text{ € sin impuestos}$$

$$|\Delta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 500 \\ 1 & 1 & 60 \\ 1{,}06 & 1{,}12 & 592{,}4 \end{vmatrix} = 592{,}4 + 63{,}6 + 560 - 530 - 67{,}2 - 592{,}4 = 26{,}4 \rightarrow x = \frac{26{,}4}{0{,}12} = 220 \text{ € sin impuestos}$$

Si le añadimos los impuestos:
Refrescos: 120 € x 1,06 = 127,2 €
Cerveza: 160 € x 1,12 = 179,2 €
Vino: 220 € x 1,3 = 286 €.

Luego se han invertido 127,2 € en refrescos, 179,2 € en cerveza, y 286 € en vino.

Ejercicio 7B Julio (mod 4) 2023 (Geometría)

Considera los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y = 2$.

a) (1’5 puntos) Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto P (2, 6, -2).

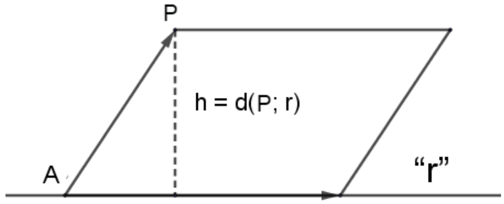
b) (1 punto) Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.

Solución

a)

Calcula la distancia entre la recta intersección de π_1 y π_2 y el punto P (2, 6, -2).

Calculamos la distancia como la altura del paralelogramo formado por los vectores $\vec{u}$, vector director de la recta r intersección de π_1 y π_2 y el vector **AP**



$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{Si } y = \lambda \rightarrow \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ x = -z + \lambda \text{ ; } 2 - \lambda = -z + \lambda \text{ ; } z = -2 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{donde} \begin{cases} A\,(2, 0, -2) \\ \vec{u} = (-1, 1, 2) \end{cases}$$

$\overrightarrow{AP}$ = (0, 6, 0)

Área paralelogramo = $||\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} \times \vec{\boldsymbol{u}}||$ = base por altura = $||\vec{\boldsymbol{u}}||\cdot h$, de donde h = $(||\overrightarrow{\boldsymbol{AP}} \times \vec{\boldsymbol{u}}||) / (||\vec{\boldsymbol{u}}||)$, donde “x” es el producto vectorial de dos vectores y || || es el módulo del vector correspondiente, por tanto:

$d(P; r) = h = (||\overrightarrow{AP} \times \vec{u}||) / (||\vec{u}||)$

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = \mathbf{i}(12-0) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(0+6) = (12, 0, 6).$$

Área paralelogramo = $||\overrightarrow{AP} \times \vec{u}|| = \sqrt{12^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{180}\ u^2$.

La base del paralelogramo es $||\vec{u}|| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}\ u$.

Luego la distancia pedida es:

$$d(P; r) = h = (||\overrightarrow{AP} \times \vec{u}||) / (||\vec{u}||) = \frac{\sqrt{180}}{\sqrt{6}} = \sqrt{30}\ u \cong 5{,}47726\ u\ .$$

b)

Halla el ángulo que forman π_1 y π_2.

El ángulo que forman los planos viene determinado por los ángulos que forman sus vectores normales $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$.

$\overrightarrow{n_1} = (1, -1, 1) \rightarrow |\overrightarrow{n_1}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$\overrightarrow{n_2} = (1,1,0) \rightarrow |\overrightarrow{n_2}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

$$\cos\left(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right) = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|(1,-1,1) \cdot (1,1,0)|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{|1\cdot 1 - 1\cdot 1 + 1\cdot 0|}{\sqrt{6}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0$$

$$\alpha = \arccos 0 = 90º = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

Los planos son perpendiculares.

Ejercicio 8B Julio (mod 4) 2023 (Geometría)

Calcula el volumen del tetraedro que limita el plano determinado por los puntos A (0,2, -2), B (3, 2, 1) y C (2,3,2) con los planos cartesianos.

Solución

Sabemos que el volumen de un tetraedro es 1/6 del volumen del paralelepípedo que determinan sus vectores. Primero debo hallar el plano formado por los tres puntos dados A, B y C, y luego los puntos de corte del mismo con los ejes cartesianos.

Tomo el punto A (0,2-2) y los vectores $\overrightarrow{AB}$ = (3,0,3) y $\overrightarrow{AC}$ = (2,1,4).

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z+2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0\ ;\ 6(y-2) + 3(z+2) - 3x - 12(y-2) = 0\ ;\ 6y - 12 + 3z + 6 - 3x - 12y + 24 = 0\ ;$$

$-3x - 6y + 3z + 18 = 0\ ;\ \pi \equiv x + 2y - z - 6 = 0$

Veamos los puntos de corte del plano $\pi \equiv x + 2y - z - 6 = 0$ con los ejes:

Corte con OX, y = z = 0, punto A (6,0,0) → Vector OA = (6,0,0)

Corte con OY, x = z = 0, punto B (0,3,0) → Vector OB = (0,3,0)

Corte con OZ, x = y = 0, punto C (0,0,-6) → Vector OC = (0,0,-6)

$$V_p = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = |6 \cdot 3 \cdot (-6)| = |-108| = 108\ u^3$$

$$V_t = \frac{108}{6} = 18\ u^3$$